

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Ιανουαρίου 2025

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 33

β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

$$A2. \quad \eta\mu 0 = 0, \quad \epsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1, \quad \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\phi \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A3. \quad 1 - \Sigma, 2 - \Lambda, 3 - \Sigma, 4 - \Sigma, 5 - \Lambda$$

ΘΕΜΑ Β

$$B1. \quad \begin{cases} x + 2y = 8 \\ -2x + y = -1 \end{cases}, \text{πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με το 2 προκύπτει:}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ -2x + y = -1 \end{cases}, \text{προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις έχουμε } 5y = 15$$

Άρα $y=3$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη όπου y το 3 προκύπτει $x=2$.Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x_0, y_0) = (2, 3)$ B2. α. Αφού $x_0 = 2$ η συνάρτηση g γίνεται $g(x) = x^2 + 2$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

- για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$
- $g(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = g(x)$

Άρα η συνάρτηση g είναι άρτια.β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

B3. Αφού η συνάρτηση g είναι άρτια ισχύει $g(-2025) = g(2025)$, επομένως είναι:

$$h(x) = \frac{g(-2025)}{-g(2025)}x - 2024 = \frac{g(2025)}{-g(2025)}x - 2024 = -x - 2024$$

Η συνάρτηση h είναι της μορφής $ax + \beta$ με $a < 0$, επομένως είναι γνησίως φθίνουσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\frac{\sin x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sin x}{1 + \eta\mu x} = \frac{\sin x(1 + \eta\mu x)}{(1 - \eta\mu x)(1 + \eta\mu x)} + \frac{\sin x(1 - \eta\mu x)}{(1 + \eta\mu x)(1 - \eta\mu x)} =$$

$$\frac{\sin x + \sin x \eta\mu x + \sin x - \sin x \eta\mu x}{(1 - \eta\mu x)(1 + \eta\mu x)} = \frac{2\sin x}{1 - \eta\mu^2 x} = \frac{2\sin x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$$

Γ2. Αρχικά έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x, \quad \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu x,$$

$$\eta\mu(2025\pi + x) = \eta\mu(2024\pi + \pi + x) = \eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x,$$

$$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi x.$$

$$\text{Επομένως } A = \frac{-\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (-\eta\mu x)}{-\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \varepsilon\varphi x} = -1$$

Γ3. α. Εργαζόμαστε στο διάστημα $[0, \pi]$. Για να ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί

που εμφανίζονται στην εξίσωση πρέπει $x \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

$$\left(\frac{\sin x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sin x}{1 + \eta\mu x} - 4\right)(\sigma\varphi x + A) = 0 \stackrel{\Gamma1, \Gamma2}{\Rightarrow} \left(\frac{2}{\sin x} - 4\right)(\sigma\varphi x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\sin x} - 4 = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\varphi x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \sigma\varphi x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

που είναι δεκτές.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

$$\beta. -3A\epsilon\phi x = \sqrt{3} \Rightarrow 3\epsilon\phi x = \sqrt{3} \Rightarrow \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ζητάμε λύσεις στο $[2\pi, 5\pi]$ επομένως πρέπει: $2\pi \leq x \leq 5\pi \Rightarrow$

$$2\pi \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq 5\pi \xrightarrow{\cdot 6} 12\pi \leq 6\kappa\pi + \pi \leq 30\pi \xrightarrow{-\pi} 11\pi \leq 6\kappa\pi \leq 29\pi \xrightarrow{:6\pi} \frac{11}{6} \leq \kappa \leq \frac{29}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Οι ακέραιοι που υπάρχουν στο παραπάνω διάστημα είναι οι 2, 3, 4. Επομένως από τον τύπο λύσεων της εξίσωσης έχουμε:

$$\text{για } \kappa=2, x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}, \text{ για } \kappa=3, x = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6} \text{ και για}$$

$$\kappa=4, x = 4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Για $t=0$ και $t=4$ έχουμε αντίστοιχα τις τιμές της μετοχής στην έναρξη και λήξη της διαπραγμάτευσης τη συγκεκριμένη ημέρα:

$$f(0) = 2 + \eta\mu(0\pi) = 2 \text{ ευρώ και } f(4) = 2 + \eta\mu(4\pi) = 2 \text{ ευρώ.}$$

β. Έχουμε: $0 \leq t \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \pi t \leq 4\pi$, επομένως το $\eta\mu(\pi t)$ παίρνει όλες τις τιμές του

$$\text{διαστήματος } [-1, 1]. \text{ Άρα } -1 \leq \eta\mu(\pi t) \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq 2 + \eta\mu(\pi t) \leq 3 \text{ ή } 1 \leq f(t) \leq 3$$

Άρα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f είναι 1 και 3 ευρώ αντίστοιχα.

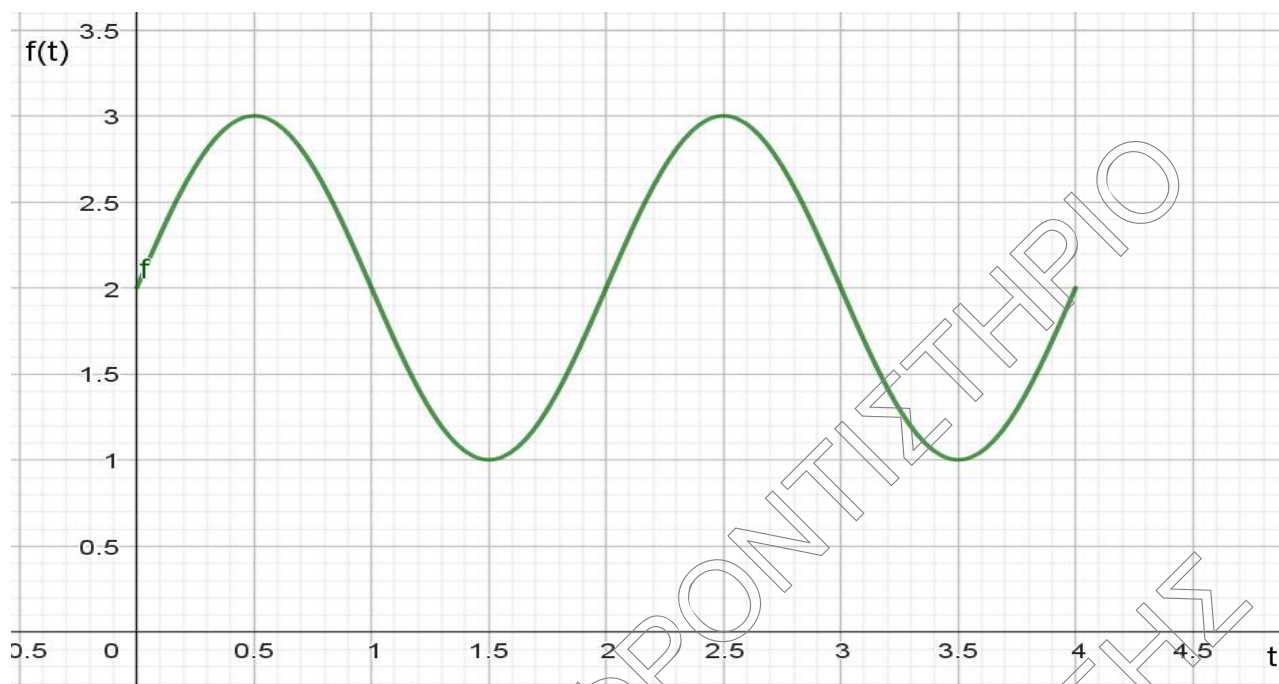
γ. $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ώρες

Δ2. Αφού $T=2$ ώρες και $0 \leq t \leq 4$ θα χαράξουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε διάστημα 2 περιόδων. Ακολουθεί πίνακας τιμών και μονοτονίας της συνάρτησης f .

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
f(t)	2	3	2	1	2	3	2	1	2

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)



Δ3. α. Παρατηρούμε ότι οι χρονικές στιγμές $t_1 = 0,8$ και $t_2 = 1,3$ ώρες ανήκουν στο διάστημα $[0,5, 1,5]$ στο οποίο η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως αφού $t_1 < t_2$ έχουμε $f(t_1) > f(t_2)$. Άρα η τιμή αγοράς είναι μεγαλύτερη από την τιμή πώλησης. Συνεπώς ο επενδυτής είχε ζημία.

β. Η επενδύτρια ξόδεψε 1000 ευρώ και κέρδισε 2000 ευρώ. Συνεπώς από την πώληση των μετοχών εισέπραξε 3000 ευρώ. Γνωρίζουμε από προηγούμενο ερώτημα ότι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της μετοχής είναι 1 και 3 ευρώ αντίστοιχα. Επομένως η μοναδική περίπτωση να ξοδέψει 1000 ευρώ και να εισπράξει 3000 ευρώ, δηλαδή τα τριπλάσια χρήματα από όσα έδωσε είναι να αγοράσει στην ελάχιστη τιμή του 1 ευρώ και να πουλήσει στη μέγιστη τιμή των 3 ευρώ. Αυτό επιτυγχάνεται, τη συγκεκριμένη ημέρα, μόνο με αγορά τη στιγμή $t_{\text{αγοράς}} = 1,5$ ώρα που είναι θέση ολικού ελαχίστου με τιμή 1 ευρώ, άρα με 1000 ευρώ αγόρασε προφανώς 1000 μετοχές και να πουλήσει τη στιγμή $t_{\text{πώλησης}} = 2,5$ ώρες που είναι θέση ολικού μεγίστου με τιμή 3 ευρώ.

Το εύρος της τιμής της μετοχής είναι από 1 έως 3 ευρώ δηλαδή 2 ευρώ όση είναι η διαφορά μέγιστης ελάχιστης τιμής. Επομένως δεν μπορεί κανείς να εισπράξει περισσότερα από τα τριπλάσια χρήματα της επένδυσής του και άρα να κερδίσει περισσότερα από τα διπλάσια χρήματα της επένδυσής του. Άρα με επένδυση 1000 ευρώ δεν θα μπορούσε το κέρδος να είναι μεγαλύτερο των 2000 ευρώ.